

一、单选题

1. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = 2$ , 则  $m =$  ( )

- A. 0
- B. 1/2
- C. 1
- D. 2

答案: D

2. 设  $y = e^x + \cos x$ , 则  $y' =$  ( )

- A.  $e^x + \cos x$
- B.  $e^x - \cos x$
- C.  $e^x - \sin x$
- D.  $e^x + \sin x$

答案: C

3. 设  $y = x \tan x$ , 则  $y' =$  ( )

- A.  $\frac{\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x}$
- B.  $\frac{x}{\cos^2 x}$
- C.  $\tan x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- D.  $\tan x + \frac{x}{1+x^2}$

答案: A

4. 设  $y = \frac{1}{1+x}$ , 则  $y'' =$  ( )

- A.  $-\frac{2}{(1+x)^3}$
- B.  $-\frac{1}{(1+x)^3}$
- C.  $\frac{1}{(1+x)^3}$
- D.  $\frac{2}{(1+x)^3}$

答案: D

5. 曲线  $y = x^3 + 1$  的拐点为 ( )

- A. (0, 0)
- B. (0, 1)
- C. (-1, 0)
- D. (1, 1)

答案: B

6. 设  $f(x)$  的一个原函数为  $\cos 2x$ , 则  $f(x) = ( \quad )$

- A.  $-\sin 2x$
- B.  $\sin 2x$
- C.  $-2\sin 2x$
- D.  $2\sin 2x$

答案: C

7. 设  $\int_{-a}^a (x^2 + x^3) dx = \frac{2}{3}$ , 则  $a = ( \quad )$

- A. -2
- B. -1
- C. 1
- D. 2

答案: C

8. 设  $z = \sin(x - 3y^2)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial y} = ( \quad )$

- A.  $-6y \cos(x - 3y^2)$
- B.  $-6y \sin(x - 3y^2)$
- C.  $6y \cos(x - 3y^2)$
- D.  $6y \sin(x - 3y^2)$

答案: A

9. 设  $z = f(x^2 + y)$ , 其中  $f$  具有二阶导数, 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ( \quad )$

- A.  $xf''(x^2 + y)$
- B.  $2xf''(x^2 + y)$
- C.  $yf''(x^2 + y)$
- D.  $2xyf''(x^2 + y)$

答案: B

10. 已知事件 A 与 B 互斥, 且  $P(A) = 0.5$ ,  $P(B) = 0.4$ , 则  $P(A+B) = ( \quad )$

- A. 0.4
- B. 0.5
- C. 0.7
- D. 0.9

答案: D

## 二、填空题

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \underline{\underline{(3/2)}}$

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $a =$  (e)

13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 2} =$  (2)

14. 设  $y = \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$ , 则  $y'(1) =$  (0)

15. 设  $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$ , 则  $f'(x) =$   $(-(2/x^3) + 1)$

16. 曲线  $y=2x^3+x-1$  在点  $(0, -1)$  处法线的斜率为 (-1)

17.  $\int \frac{1}{4+x^2} dx =$   $\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C\right)$

18.  $\int x(x^2 - 1) dx =$   $\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C\right)$

19.  $\int_0^1 (x + e^x) dx =$  (e-1/2)

20. 设函数  $f(x, y) = x+y$ , 则  $f(x+y, x-y) =$  (2x)

### 三、问答题

21. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

答案:

22. 求函数  $f(x) = e^{-x^2}$  的单调区间和极值.

22. 函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ .

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 0$ ,

当  $x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $f'(x) < 0$ .

所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, 0)$ , 单调递减区间为  $(0, +\infty)$ ,

$f(x)$  的极大值为  $f(0) = 1$ .

答案:

23. 求  $\int (2\arcsin x + 1) dx$ .

$$\begin{aligned} 23. \int (2\arcsin x + 1) dx &= 2x\arcsin x - 2 \int x d(\arcsin x) + x \\ &= 2x\arcsin x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx + x \\ &= 2x\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + x + C. \end{aligned}$$

答案:

24. 计算  $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$ .

答

案

24. 令  $t = \sqrt{x}$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ .

当  $x = 1$  时,  $t = 1$ ; 当  $x = 4$  时,  $t = 2$ . 因此

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{2t}{t^2+t} dt \\ &= 2 \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt \\ &= 2 \ln(t+1) \Big|_1^2 \\ &= 2 \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

26. 设  $y=y(x)$  是由方程  $e^y=x^2+y$  所确定的隐函数, 求  $dy/dx$ .

26. 方程两边对  $x$  求导, 得  $e^y \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dy}{dx}$ ,

所以  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^y - 1}$ .

答案:

28. 求函数  $f(x, y)=x^2+y^2$  在条件  $x^2+y^2-xy-1=0$  下的最大值和最小值.

答

案

设  $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 1)$ , 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda(2x - y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda(2y - x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - xy - 1.$$

由  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  与  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$  解得  $x = y$  或  $x = -y$ ,

代入  $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$  得  $f(x, y)$  在条件  $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$  下可能的极值点为

$$(1, 1), (-1, -1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

因为由题设可知最大值和最小值一定存在,所以最大值和最小值就在这些可能的极值点处取得.

$$\text{又 } f(1, 1) = f(-1, -1) = 2,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

所以所求的最大值为 2, 最小值为  $\frac{2}{3}$ .

#### 四、材料分析题

$X$	0	1	2	3
$P$	$a$	$3a$	$4a$	$2a$

25. 设离散型随机变量  $X$  的概率分布为  $a$  为常数。

, 其中

(1) (问) 求  $a$ ;

(1) 由概率分布的性质知

$$a + 3a + 4a + 2a = 1,$$

所以  $a = 0.1$ .

答案:

(2) (问) 求  $E(X)$ 。

$$(2) E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2$$

答案:

$$= 1.7.$$

27. 设  $D$  为由直线  $x + y - 4 = 0$  与曲线  $y = 3/x$  所围成的闭区域.

(1) (问) 求  $D$  的面积;

$$\text{由} \begin{cases} x + y - 4 = 0, \\ y = \frac{3}{x} \end{cases} \quad \text{解得交点坐标为}(1,3), (3,1).$$

$$\begin{aligned} (1) D \text{ 的面积 } S &= \int_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x}\right) dx \\ &= \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln x\right) \Big|_1^3 \\ &= 4 - 3\ln 3. \end{aligned}$$

答案:

(2) (问) 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积。

(2)  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_1^3 \left[ (4-x)^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 \right] dx \\ &= \pi \left[ -\frac{1}{3}(4-x)^3 + \frac{9}{x} \right] \Big|_1^3 \\ &= \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

答案: