高等数学公式

• 导数公式

$c' = 0$（c 为常数）

$(x^a)' = ax^{a-1}$（a 为实数）

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

• 不定积分基本公式

1. $\int 0 \mathrm{d}x = C.$

2. $\int x^a \mathrm{d}x = \dfrac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1).$

3. $\int \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln |x| + C.$

4. $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a} a^x + C$，特别地 $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C.$

5. $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C.$

7. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \tan x + C.$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$

10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$

[注] 基本积分公式是由基本初等函数求导公式推演得出，常用的积分公式有：

11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a>0).$

12. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a>0).$

13. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C.$

14. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C.$

15. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C.$

16. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C.$

17. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

18. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a>0).$

★记住导数基本公式反过来即是积分公式，要记住＋常数 C

- 两个重要极限

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$

★两个重要极限要记得极限趋近值不一样

• 常见的等价无穷小代换

$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$；$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$

$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$；$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$；$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

★在使用等价无穷小时要记住两个变量都为无穷小的前提下

• 中值定理与导数应用

拉格朗日中值定理：$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理：$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当$F(x)=x$时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

• 第一换元积分法常用公式

常用的凑微分公式：

1. $f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b) \quad (a \neq 0)$.

2. $f(ax^k+b)x^{k-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{ka}f(ax^k+b)\mathrm{d}(ax^k+b) \quad (a \neq 0, k \neq 0)$.

3. $f(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -f(\frac{1}{x})\mathrm{d}(\frac{1}{x})$.

4. $f(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2f(\sqrt{x})d\sqrt{x}$.

5. $f(e^x)\cdot e^x dx = f(e^x)de^x$.

6. $f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = f(\ln x)d(\ln x)$.

7. $f(\sin x)\cdot\cos x dx = f(\sin x)d(\sin x)$.

8. $f(\cos x)\cdot\sin x dx = -f(\cos x)d(\cos x)$.

9. $f(\tan x)\cdot\sec^2 x dx = f(\tan x)d(\tan x)$.

10. $f(\cot x)\cdot\csc^2 x dx = -f(\cot x)d(\cot x)$.

11. $f(\arcsin x)\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = f(\arcsin x)d(\arcsin x)$.

12. $f(\arccos x)\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -f(\arccos x)d(\arccos x)$.

13. $f(\arctan x)\cdot\frac{dx}{1+x^2} = f(\arctan x)d(\arctan x)$.

★凑微分公式不用背，但是可以理解公式如何推导出来的。

• 第二换元积分法（即引用新变量）

(1)三角代换.
如果被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，作代换x=asint或x=acost；如果被积函数含有 $\sqrt{x^2+a^2}$ 作代换x=atant;
如果被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 作代换x=asxct.利用三角代换，可以吧根式积分化为三角有理式积分
(2)倒代换（即令 $x=\frac{1}{t}$ ）
如果被积函数的分子和分母关于积分变量x的最高次幂分别为m和n，当n-m>1时，用倒代换常可以消去在被积函数的分母中的变量因子x
(3) 幂代换（即令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$）
如果被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$，作代换 $\sqrt[n]{ax+b}=t$.

★倒代换和幂代换要求掌握，三角代换难度略大，根据自己情况理解掌握。

- 定积分的应用-求平面图形的面积以及旋转体体积

1. 由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b(a<b)$ 及 x 轴所围图形面积为

$$S=\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x.$$

当 $f(x)\geqslant 0$ 时，$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

当 $f(x)\leqslant 0$ 时，$S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

当 $f(x)$ 有正有负时，$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

2. 由两曲线 $y=f_1(x), y=f_2(x)(f_2(x)>f_1(x))$ 及两直线 $x=a, x=b(a<b)$ 所围图形的面积为

$$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

3. 由曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c, y=d(c<d)$ 及 y 轴所围图形的面积为

$$S=\int_c^d |\varphi(y)| \mathrm{d}y.$$

4. 由两曲线 $x=\varphi_1(y), x=\varphi_2(y)$，且 $\varphi_1(y),\varphi_2(y)$ 在 y 轴同侧，$(\varphi_2(y)>\varphi_1(y))$ 及两直线 $y=c, y=d(c<d)$ 所围图形面积为

$$S=\int_c^d[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]\mathrm{d}y.$$

5. 由曲线 $y=f_1(x), y=f_2(x)(f_2(x)>f_1(x))$ 所围成的封闭图形的面积为

$$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

其中 a 是交点中 x 的最小值，b 是交点中 x 的最大值.

1. 由曲线段 $y=f(x), x\in[a,b]$ 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

上述体积公式也可以看做由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b(a<b)$ 及 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成的体积.

2. 由曲线段 $x=\varphi(y), y\in[c,d]$ 绕 y 轴旋转一周所成的体积为

$$V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y.$$

上述体积公式也可以看做由曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c, y=d(c<d)$ 及 y 轴所围平面图形绕 y 轴旋转一周所成的体积.

3. 由两曲线 $y=f_1(x), y=f_2(x)$，且 $f_1(x), f_2(x)$ 在 x 轴同侧，$|f_2(x)|>|f_1(x)|$ 及两直线 $x=a, x=b(a<b)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成的体积为

$$V=\pi\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]\mathrm{d}x.$$

4. 由两曲线 $x=\varphi_1(y), x=\varphi_2(y)$，且 $\varphi_1(y)$、$\varphi_2(y)$ 在 y 轴同侧，$|\varphi_2(y)|>|\varphi_1(y)|$ 及两直线 $y=c, y=d(c<d)$ 所围平面图形绕 y 轴旋转一周所成的体积为

$$V=\pi\int_c^d[\varphi_2^2(y)-\varphi_1^2(y)]\mathrm{d}y.$$

• 空间解析几何

$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$.

(1) 数量积:
(点乘)
(内积)

$$\begin{cases}
① \ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>. \\
② \ \vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_zb_z. \\
③ \ \cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \\
④ \ \vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \\
⑤ \ \vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}. \\
⑥ \ Prj_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.
\end{cases}$$

(2) 向量积:
(叉乘)
(外积)

$$\begin{cases}
① \ \vec{a}\times\vec{b}=\begin{cases}\text{大小}:|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin<\vec{a},\vec{b}>. \\ \text{方向}:\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}.\text{(右手法则)}\end{cases} \\
② \ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}. \\
③ \ \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z \\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z \\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y \\ b_x & b_y\end{vmatrix} \\
\qquad =\vec{i}(a_yb_z-a_zb_y)-\vec{j}(a_xb_z-a_zb_x)+\vec{k}(a_xb_y-a_yb_x). \\
④ \ \vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}. \\
⑤ \ |\vec{a}\times\vec{b}|=S_{\square}=2S_{\triangle}.
\end{cases}$$

平面的方程：

1、点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$\vec{n}=\{A,B,C\}, M_0(x_0,y_0,z_0)$

2、一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

3、截距世方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$，其中$\vec{s}=\{m,n,p\}$；参数方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$

二次曲面：

1、椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$,（$p,q$同号）

3、双曲面：

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（马鞍面）

★平面和直线方程，以及二次曲面对应的方程要求掌握。

• 无穷级数

常数项级数：

等比数列:$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$

等差数列:$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$

调和级数:$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$是发散的

级数审敛法：

1、正项级数的审敛法 — —根植审敛法（柯西判别法）：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

2、比值审敛法：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

3、定义法：

$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$；$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$存在，则收敛；否则发散。

交错级数$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$(或$-u_1+u_2-u_3+\cdots,u_n>0$)的审敛法— —莱布尼兹定理：

如果交错级数满足$\begin{cases}u_n\geq u_{n+1}\\ \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\end{cases}$，那么级数收敛且其和$s\leq u_1$,其余项$r_n$的绝对值 $|r_n|\leq u_{n+1}$。

绝对收敛与条件收敛：

$(1)u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，其中$u_n$为任意实数；

$(2)\ |u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$

如果(2)收敛，则(1)肯定收敛，且称为绝对收敛级数；

如果(2)发散，而(1)收敛，则称(1)为条件收敛级数。

调和级数:$\sum\frac{1}{n}$发散，而$\sum\frac{(-1)^n}{n}$收敛；

级数:$\sum\frac{1}{n^2}$收敛；

p级数:$\sum\frac{1}{n^p}$ $\begin{matrix}p\leq1\text{ 时发散}\\ p>1\text{时收敛}\end{matrix}$

★收敛性根据自己情况掌握，不一定会考

幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 总在 $x=0$ 处收敛.

3. 收敛半径

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x=0$ 点收敛，则记 $R=0$；若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在整个数轴上都收敛，则记 $R=+\infty$.

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R(0<R\leqslant+\infty)$，其收敛区间为 $(-R,R)$.

(3) 收敛半径的求法.

对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则有

① 若 $\rho\neq 0$，则 $R=\frac{1}{\rho}$.

② 若 $\rho=0$，则 $R=+\infty$（在整个数轴上都收敛）.

③ 若 $\rho=+\infty$，则 $R=0$（仅在 $x=0$ 点收敛）.

几种初等函数的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (-1<x<1)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (-1<x\leqslant 1)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad (-1\leqslant x<1)$$

★幂级数的收敛半径以及幂级数展开式要掌握

• 常微分方程

1、一阶线性微分方程：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

$$\begin{cases}\text{当}Q(x)=0\text{时,为齐次方程，}y=Ce^{-\int P(x)dx}\\ \text{当}Q(x)\neq 0\text{时，为非齐次方程，}y=(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)e^{-\int P(x)dx}\end{cases}$$

二阶微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x),\begin{cases}f(x)\equiv 0\text{时为齐次}\\ f(x)\neq 0\text{时为非齐次}\end{cases}$$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：

$(*)\ y''+py'+qy=0$，其中p,q为常数；

求解步骤：

1、写出特征方程：$(\Delta)r^2+pr+q=0$，其中r^2，r的系数及常数项恰好是$(*)$式中y'',y',y的系数

2、求出(Δ)式的两个根r_1,r_2

3、根据r_1,r_2的不同情况，按下表写出$(*)$式的通解：

r_1，r_2的形式	$(*)$式的通解
两个不相等实根$(p^2-4q>0)$	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
两个相等实根$(p^2-4q=0)$	$y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根$(p^2-4q<0)$ $r_1=\alpha+i\beta\quad r_2=\alpha-i\beta$ $\alpha=-\frac{p}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$，p,q为常数

$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型，λ为常数；

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

1. 先求出与其对应的齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 $\bar{y}$.

2. 再求出非齐次方程的特解 y^*，则该方程的通解为 $y=\bar{y}+y^*$.

3. 特解 y^* 的求法

(1) 若 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$，则方程的特解可设为 $y^*=x^kQ_n(x)e^{\alpha x}$.

其中 $Q_n(x)$ 与 $P_n(x)$ 是同次多项式，系数待定，且

$$k=\begin{cases}0, \alpha \text{ 不是特征根}, \\ 1, \alpha \text{ 为单独特征根}, \\ 2, \alpha \text{ 为二重特征根}.\end{cases}$$

(2) 若 $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$，则方程的特解可设为 $y^*=x^ke^{\alpha x}(A_1\cos\beta x+B_1\sin\beta x)$.

其中 A_1, B_1 为待定系数，且 $k=\begin{cases}0, \alpha+i\beta \text{ 不是特征根}, \\ 1, \alpha+i\beta \text{ 是特征根}.\end{cases}$

解题指导

二阶常系数线性微分方程的求解方法：

第一步：首先判断方程类型是否为二阶常系数线性微分方程.

第二步：若是，看是齐次，还是非齐次.

1. 若是齐次的，应先写出特征方程：$r^2+pr+q=0$，然后求特征根，由特征根构造方程的通解.

2. 若是非齐次的，应先求出其对应的齐次方程的通解，然后构造非齐次方程的特解，最后由解的结构得到原非齐次方程的通解.

★一阶线性微分方程-齐次和非齐次的通解公式都要掌握，二阶齐次线性微分方程求解过程掌握，非齐次线性微分方程的公式可根据自己情况理解.