极限与连续的 62 个典型习题

习题 1 设$a_i > 0,\quad i=1,2,\cdots,m$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_m{}^n)^{\frac{1}{n}}$.

解 记$a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，则有

$(a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_m{}^n)^{\frac{1}{n}} \ge (a^n)^{\frac{1}{n}} = a$， $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$. 另一方面

$(a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_m{}^n)^{\frac{1}{n}} \le (ma^n)^{\frac{1}{n}} = a\cdot(m)^{\frac{1}{n}}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} m^{\frac{1}{n}} = (\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}) = 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a\cdot m^{\frac{1}{n}} = a$. 利用两边夹定理，知

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_m{}^n)^{\frac{1}{n}} = a$， 其中 $a=\max\{a_1,a_2,\cdots a_m\}$.

例如 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+3^n+5^n+9^n)^{\frac{1}{n}} = 9$.

习题 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} < \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

即 $\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)} < \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} < \frac{n(1+n)}{2(n^2+n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{2(n^2+2n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{4}{n}} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{2(n^2+n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

利用两边夹定理知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right) = \frac{1}{2}.$$

习题 3　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})^n$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})^n=\lim\limits_{n\to\infty}((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}))^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{(n+1)-1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1-\frac{1}{n+1})^{-1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{-(n+1)})^{-(n+1)}]^{-1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{-1}=e^{-1}\cdot 1=e^{-1}$

习题 4　求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-\sqrt[m]{x}}\quad(m,n\in N)$.

解（变量替换法）令 $t=\sqrt[mn]{x}$，则当 $x\to 1$ 时，$t\to 1$. 于是,

原式 $=\lim\limits_{t\to 1}\frac{1-t^m}{1-t^n}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{m-1})}{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})}=\frac{m}{n}$.

习题 5　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{x-1})^{\sqrt{x}}$.

解（变量替换法）令 $\sqrt{x}=t, x\to+\infty, t\to+\infty$，

原式 $=\lim\limits_{t\to\infty}(\frac{t^2}{t^2-1})^t=\lim\limits_{t\to\infty}(\frac{t}{t-1}\cdot\frac{t}{t+1})^t=\lim\limits_{t\to\infty}[(1+\frac{1}{t})^{-1}\cdot(1-\frac{1}{t})^{-1}]^t$

$=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-t}\cdot(1-\frac{1}{t})^{-t}=e^{-1}\cdot e=e^0=1$.

习题 6　求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{3-e^x}{2+x})^{\frac{1}{\sin x}}$　（1^∞ 型）。

为了利用重要极限，对原式变形

$$\lim_{x\to 0}(\frac{3-e^x}{2+x})^{1/\sin x}=\lim_{x\to 0}(\frac{2+x+1-x-e^x}{2+x})^{1/\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}[(1+\frac{1-x-e^x}{2+x})^{\frac{2+x}{1-x-e^x}}]^{\frac{1-e^x-x}{2+x}\cdot\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}[(1+\frac{1-x-e^x}{2+x})^{\frac{2+x}{1-x-e^x}}]^{\frac{-x-x}{2+x}\cdot\frac{1}{\sin x}}=e^{-2/2}=e^{-1}$$

习题 7　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$. 解 原式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2}-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-x^2-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=\frac{-2}{4\cdot 2}=-\frac{1}{4}.$$

习题 8　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$.　解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}}{3-\frac{2}{x}}=\frac{2}{3}.$$

而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2(4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2})}}{x(3-\frac{2}{x})}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{(4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2})}}{x(3-\frac{2}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{(4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2})}}{(3-\frac{2}{x})}=\frac{-2}{3}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$. 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$ 不存在。

习题 9　研究下列极限　（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

∵　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x$，其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$|\sin x|\le 1$. ∴ 上式极限等于 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$. （2） $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

因为 $|\sin\frac{1}{x}|\le 1$， $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$， 所以 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x} = 0$.

（3） $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}$. 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$.

习题 10 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(x+a^x)^{\frac{1}{x}}$， $(a>0, a\ne 1)$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} a(1+xa^{-x})^{\frac{1}{x}} = a\lim\limits_{x\to 0}(1+xa^{-x})^{\frac{1}{xa^{-x}}\cdot a^{-x}}$

$$= a\cdot[\lim_{x\to 0}(1+xa^{-x})^{\frac{1}{xa^{-x}}}]^{\lim\limits_{x\to 0} a^{-x}} = a\cdot e^1 = ae\ .$$

习题 11 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\alpha}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\alpha\ln x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x}\cdot\dfrac{\alpha\ln x}{x-1}$

$$= \lim_{\alpha\ln x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x}\cdot\lim_{(x-1)\to 0}\frac{\alpha\ln[1+(x-1)]}{x-1} = 1\times\alpha\times 1 = \alpha\ .$$

习题 12 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+bx+c}{1-x} = 5$， 求 b,c 的值。

解 首先 $\lim\limits_{x\to 1} x^2+bx+c = 1+b+c = 0$， $\therefore b = -1-c$

原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-c)}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}[-(x-c)] = c-1 = 5$，

$\therefore$ $c = 6$， 而 $b = -(1+c) = -(1+6) = -7$.

习题 13 下列演算是否正确？

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\underset{\downarrow\atop 0}{x}\cdot\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}}\cdot\underset{\text{有界}}{\sin\frac{1}{x^2}} = 0\ .$$

习题 14 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0.$$

习题 15 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sin x^2}{x+1}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}=0$， $|\sin x^2|\le 1$， 原式 = 0.

习题 16 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+m}{x+n})^{kx+b}=e^{k(m-n)}$ （m,n,k,b 为常数）。

证 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+m}{x+n})^{kx+b}=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+n+(m-n)}{x+n})^{kx+b}$ （令 $\dfrac{1}{x+n}=\dfrac{1}{y}$）

$$=\lim_{y\to\infty}(\frac{x+m}{x+n})^{kx+b}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{m-n}{y})^{k(y-n)+b}$$

$$=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{m-n}{y})^{k(m-n)\cdot\frac{y}{m-n}-kn+b}$$

$$=\lim_{y\to\infty}[(1+\frac{m-n}{y})^{\frac{y}{m-n}}]^{k(m-n)}\cdot\lim_{y\to\infty}(1+\frac{m-n}{y})^{-kn+b}$$

$$=e^{k(m-n)}\cdot 1=e^{k(m-n)}.$$

习题 17 求 $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin x)^{\frac{3}{x}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}(1+(-\sin x))^{\frac{1}{-\sin x}\cdot\frac{-3\cdot\sin x}{x}}=e^{-3}$.

习题 18 求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$. **解** （连续性法）

原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}\ln\dfrac{x}{a}=\lim\limits_{x\to a}\ln(\dfrac{x}{a})^{\frac{1}{x-a}}$

$$=\lim_{x\to a}\ln[1+\frac{x-a}{a}]^{\frac{a}{x-a}\cdot\frac{1}{a}}=\ln[\lim_{x\to a}(1+\frac{x-a}{a})^{\frac{a}{x-a}}]^{\frac{1}{a}}=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}\ln e=\frac{1}{a}.$$

习题 19　试证方程 $x = a\sin x + b$（其中 $a>0,b>0$）至少有一个正根，并且它不大于 $a+b$.

证 设 $f(x) = a\sin x + b - x$，此初等函数在数轴上连续，$\therefore$ $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上必连续。$\because$ $f(0) = b > 0$，而

$f(a+b) = a\sin(a+b) - (a+b) + b = a[\sin(a+b) - 1] \le 0$　若 $f(a+b) = 0$，则 $a+b$ 就是方程 $x = a\sin x + b$ 的一个正根。

若 $f(a+b) < 0$，则由零点存在定理可知在 $(0,a+b)$ 内至少存在一点 $\xi \in (0,a+b)$，使 $f(\xi) = 0$. 即 $\xi = a\sin\xi + b$.

故方程 $x = a\sin x + b$ 至少有一正根，且不大于 $a+b$.

习题 21　求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\{[1+(\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}}\}^{-1} = e^{-1}$.

习题 20 设 $\{x_n\}$ 满足 $x_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = r < 1$. 试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = r < 1$, 取 $\varepsilon = \dfrac{1-r}{2} > 0, \exists N$, 使得当 $n > N$ 时有

$\left|\dfrac{x_n}{x_{n-1}} - r\right| < \varepsilon = \dfrac{1-r}{2}$, 即 $0 < \dfrac{x_n}{x_{n-1}} < r + \dfrac{1-r}{2} = \dfrac{r+1}{2}$,　亦即 $0 < x_n < \dfrac{r+1}{2}x_{n-1,}$

于是递推得　$0 < x_n < \dfrac{r+1}{2}x_{n-1} < (\dfrac{r+1}{2})^2 x_{n-2<\dots<}(\dfrac{r+1}{2})^{n-N}x_N$

$\because \dfrac{r+1}{2} < 1$,　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{r+1}{2})^{n-N}x_N = 0$, 从而由两边夹准则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

习题 22　用定义研究函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ 的连续性。

证 首先，当 $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}$ 是连续的。同理，当

$x<0,\ f(x)=0$ 也是连续的。而在分段点 $x=0$ 处

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 0=0=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}=0=f(0).$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. 故 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

习题 23 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}}=1$.

证 $\because \sqrt[n]{\dfrac{1}{2n}}<\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}}<1$，而

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\cdot\dfrac{1}{1}=1$. 由两边夹定理知，原式成立.

习题 24 设 $F(x,y)=\dfrac{f(y-x)}{2x}, F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5$. 任取 $x_0>0$, 记 $x_1=F(x_0,2x_0),\dots,\ x_{n+1}=F(x_n,2x_n),\dots$ 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求极限值。

证 $\because\ F(1,y)=\dfrac{f(y-1)}{2}=\dfrac{y^2}{2}-y+5=\dfrac{1}{2}[(y-x)^2+9]$,

$\therefore\ f(y-1)=(y-1)^2+9, \therefore\ f(y-x)=(y-x)^2+9$. 故

$F(x,y)=\dfrac{(y-x)^2+9}{2x}$. 由题设

$$x_1=\frac{(2x_0-x_0)^2+9}{2x_0}=\frac{x_0^2+9}{2x_0},\ x_2=\frac{x_1^2+9}{2x_1},\dots,x_{n+1}=\frac{x_n^2+9}{2x_n},\dots$$ 由于

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{9}{x_n})\geq\sqrt{x_n\cdot\frac{9}{x_n}}=3,\ \frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{9}{x_n^2})\leq\frac{1}{2}(1+\frac{9}{3^2})=1$$

$\therefore x_{n+1}\leq x_n$. 故 $\{x_n\}$ 单调有下界，故有极限。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,

由 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+9}{2x_n}\Rightarrow A=\dfrac{A^2+9}{2A}$, 解出 $A=3$（舍去 $A=-3$）。

习题 25 设 $x_0>0, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}, n=1,2,...,$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 显然 $x_0>0, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}<2.\therefore\{x_n\}$ 有上界 2，有下界 0.

$x_1-x_0=1+\dfrac{x_0}{1+x_0}-x_0=\dfrac{1+x_0-x_0^2}{1+x_0}$, 当 $0<x_0\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时

$1+x_0-x_0^2\ge 0$, 即 $x_1\ge x_0$, 假设 $x_n>x_{n-1}$, 则

$x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n}{1+x_n}-\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0$. 故 $\{x_n\}$ 单增。$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

存在。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{1+x_n}$ 得 $A=1+\dfrac{A}{1+A}$, 即

$A^2-A-1=0,\therefore A=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$（舍去负值）。当 $x_0>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，有 $x_1<x_{0,}$

用完全类似的方法可证 $\{x_n\}$ 单减有下界 0，同理可证

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

习题 26 设数列 $\{x_n\}$ 由下式给出 $x_1=2, x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}, n=1,2,...$ 求

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 $\{x_n\}$ 不是单调的，但 $\{x_{2n-1}\}$ 单增，并以 3 为上界，故有极限。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=B$. $\{x_{2n}\}$ 单减，并以 2 为下界，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=C$. 在等式 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$ 两边按奇偶取极限，得两个关系 $B=2+\dfrac{1}{C}, C=2+\dfrac{1}{B}$，

解出 $B=C$. 由于的奇数列与偶数列的极限存在且相等，因此 $\{x_n\}$

的极限存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{x_n})$. 故有 $A = 2+\frac{1}{A}$,

解出 $A = 1+\sqrt{2}$,（舍去负值 $1-\sqrt{2}$ ）

习题 27 设 $x_1 > 0,\ x_{n+1} = \frac{x_n+2}{x_n+1}$, 试证 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限。

证 显然 $x_n > 0$, 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则由 $x_{n+1} = \frac{x_n+2}{x_n+1}$ 令 $n\to\infty$，可解出

$A = 2$ （舍去 -2 ）。下面证明 $\{x_n\}$ 收敛于 $\sqrt{2}$. 由于

$$\left|x_n-\sqrt{2}\right| = \left|\frac{(\sqrt{2}-1)(x_{n-1}-\sqrt{2})}{x_{n-1}+1}\right| < (\sqrt{2}-1)\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|,$$

递推可得 $\left|x_n-\sqrt{2}\right| < (\sqrt{2}-1)^2\left|x_{n-2}-\sqrt{2}\right| < \ldots < (\sqrt{2}-1)^{n-1}\left|x_1-\sqrt{2}\right|$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1)^{n-1} = 0$. 由两边夹可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-\sqrt{2}\right| = 0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

习题 28 设 $f_1(t) = f(t) > 0,\ f_{n+1}(t) = \frac{2f_n^2(t)}{1+f_n^2(t)}$. 试证

（1） $\forall t, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ 存在;（2）当 $f(t)\ge 1$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 1$; 当 $f(t) < 1$ 时，

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$;

证 $\forall n$, 显然有 $f_n(t)\ge 0$, 又 $f_{n+1}(t) - f_n(t) = -f_n(t)\frac{[f_n(t)-1]^2}{1+f_n^2(t)} \le 0$.

$\therefore \forall t,\ f_n(t)$ 单减有下界。$\therefore$ 收敛。令 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = F(t)$, 在原式两边取

极限得 $F(t) = \frac{2F^2(t)}{1+F^2(t)}$. 由此可解出 $F(t) = 0$ 或 $F(t) = 1$. 当 $f(t)\ge 1$ 时，

$f_2(t) = \frac{2f_1^2(t)}{1+f_1^2(t)} \ge \frac{2f^2(t)}{2f^2(t)} = 1$. 归纳假设 $f_k(t)\ge 1$, 则 $f_k^2(t)\ge 1$, 而

$f_{k+1}(t) = \frac{2f_k^2(t)}{1+f_k^2(t)} \ge \frac{2f_k^2(t)}{2f_k^2(t)} = 1, \therefore \forall n$，有 $f_n(t)\ge 1$. 因此 $f(t)\ge 1$ 时

$F(t) = 1$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 1, (f(t)\ge 1$ 时）。

当 $f(t)<1$ 时，由 $f_n(t)$ 的单减性便知即当 $F(t)=0$ 时，即

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)=0$ （当 $f(t)<1$ 时）。

习题 29 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\cos x}{\cos 2x})^{\frac{1}{\sin x\sin 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\sin^2 2x})^{\frac{1}{2\sin x\sin 2x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sin^2 x)^{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\frac{-1}{4\cos x}}}{(1-\sin^2 2x)^{\frac{-1}{\sin^2 2x}\cdot(-\cos x)}}=\frac{e^{-\frac{1}{4}}}{e^{-1}}=e^{\frac{3}{4}}.$$

习题 30 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x_n)^n}{n!}=0.$

证 $\because\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$ 故 $\{x_n\}$ 必有界。设

$|x_n|\le B, n=1,2,\ldots$ 因此 $0\le\left|\dfrac{(x_n)^n}{n!}\right|\le\dfrac{B^n}{n!}$, 而 $\dfrac{B^n}{n!}\to 0,\ \therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x_n)^n}{n!}=0.$

习题 31 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^2}.$ $(0<\dfrac{n!}{n^2}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n}{n}<\dfrac{1}{n},\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^2}=0)$

变量替换求极限法

（为求 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$, 有时可令 $x=\varphi(y)$, 而 $F(x)=F[\varphi(y)]$ ）

习题 32 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{\beta}}-1}{x}$ （β 为自然数）

解 令 $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\beta}}-1=y$, 则 $x=\dfrac{[(y+1)^\beta-1]}{\alpha}$, 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{\beta}}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\dfrac{(y+1)^\beta-1}{\alpha}}=\lim_{y\to 0}\frac{\alpha y}{y^\beta+c_\beta^1 y^{\beta-1}+\ldots+c_\beta^{\beta-1}y+1-1}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\alpha}{y^{\beta-1}+c_\beta^1 y^{\beta-2}+\ldots+\beta y}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

习题 33 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+x}-1-\dfrac{1}{m}x}{x^2}.$

解 令 $\sqrt[m]{1+x}-1=y, \Rightarrow x=(y+1)^m-1$, 且当 $x\to 0$ 时 $y\to 0$, 故 原式

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y-\frac{1}{m}[(1+y)^m-1]}{[(y+1)^m-1]^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{m-1}{2}y^2+\ldots}{m^2y^2+\ldots}=-\frac{m-1}{2m^2}.$$

习题 34 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}),\ a>0.$

解 先求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\sqrt[x]{a}-\sqrt[x+1]{a})$, 令 $\frac{1}{x}=t$, 则上式

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{a^t-a^{\frac{1}{1+t}}}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}a^t\cdot\frac{1-a^{-\frac{t^2}{1+t}}}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\exp(-\frac{t^2}{1+t}\ln a)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{t^2}{1+t}\ln a}{t^2}=\ln a.$$ 故原式 $=\ln a$.

用等价无穷小替换求极限

习题 35 求 $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\varphi^2}\quad (n\in \mathrm{N}).$

解 记 $x=\sqrt[n]{\cos n\varphi}$, 则 $x\to 1\ (\varphi\to 0)$.

原式 $=\lim\limits_{\varphi\to0}\dfrac{(1-x)(1+x+\ldots+x^{n-1})}{\varphi^2(1+x+\ldots+x^{n-1})}=\lim\limits_{\varphi\to0}\dfrac{1-x^n}{n\varphi^2}=\lim\limits_{\varphi\to0}\dfrac{1-\cos n\varphi}{n\varphi^2}$

$$=\lim_{\varphi\to0}\frac{\frac{1}{2}(n\varphi)^2}{n\varphi^2}=\frac{n}{2}\quad (\text{当} u\to 0, 1-\cos u\sim\frac{1}{2}u^2)$$

习题 36 设 $f(x)$ 与 x 是等价无穷小， $f(x)\neq x$, 求证

（1） $\lim\limits_{x\to 0^+}[f(x)]^x=1$; （2） $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[f(x)]^x-x^x}{f(x)-x}=1$.

证 $\because f(x)\sim x$, 即 $\dfrac{f(x)}{x}\to 1\ \ (x\to 0)$, $\therefore \dfrac{f(x)}{x}=1+\alpha(x)$,

其中 $\alpha(x)\to 0$，当 $\to 0$，即 $f(x)=x[1+\alpha(x)]$ (当 $x\to 0$). 故

$$\lim_{x\to0^+}[f(x)]^x=\lim_{x\to0^+}x^x[1+\alpha(x)]^x=\lim_{x\to0^+}x^x\lim_{x\to0^+}[1+\alpha(x)]^x$$

$$=1\cdot\lim_{x\to0^+}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}\cdot x\alpha(x)}=e^0=1.$$

（2） $$\lim_{x\to0^+}\frac{[f(x)]^x-x^x}{f(x)-x}=\lim_{x\to0^+}x^x\cdot\frac{e^{\ln[\frac{f(x)}{x}]^x}-1}{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}\cdot\frac{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}{f(x)-x}$$

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=e^0=1.$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\ln[\frac{f(x)}{x}]^x}-1}{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln\frac{f(x)}{x}}-1}{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}=\lim_{x\ln\frac{f(x)}{x}\to0^+}\frac{e^{x\ln\frac{f(x)}{x}}-1}{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}=1.$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\ln\frac{f(x)}{x}}{f(x)-x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\ln f(x)-x\ln x}{f(x)-x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{f(x)-x}\cdot\ln[1+\frac{f(x)-x}{x}]$$

$$=\lim_{x\to0^+}\ln[1+\frac{f(x)-x}{x}]^{\frac{x}{f(x)-x}}=\ln\lim_{x\to0^+}[1+\frac{f(x)-x}{x}]^{\frac{x}{f(x)-x}}=\ln e=1.$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{x\to0^+}\frac{[f(x)]^x-x^x}{f(x)-x}=1\times1\times1=1.$$

习题 37 设 $f(x)\in C[0,n],n\ (n\ge2)$ 为自然数，$f(0)=f(n)$. 试证 $\exists\xi,\ \xi+1\in[0,n]$, 使 $f(\xi)=f(\xi+1)$.

证 （分析：要证 $\exists\xi,\ \xi+1\in[0,n]$, 使 $f(\xi)=f(\xi+1)$. 即要证 $g(x)=f(x+1)-f(x)$ 有根 ξ） 令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$，显然在 $[0,n-1]$ 上连续，于是 $g(i)=f(i+1)-f(i),i=1,\dots,n-1$. 记 $m=\min\limits_{0\le i\le n-1}\{g(i)\}$, $M=\max\limits_{0\le i\le n-1}\{g(i)\}$, 则

$m\le\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}g(i)\le M$, 又 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}g(i)=f(n)-f(0)=0$. 对函数 $g(x)$ 应用介值定理，知 $\exists\,\xi\in[0,n-1]$, 使 $g(\xi)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}g(i)=0$, 即存在 $\xi,\ \xi+1\in[0,n-1]$, 使 $f(\xi+1)=f(\xi)$.

习题 38 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $a<c<d<b$, 证明 $\exists\,\xi\in[a,b]$,

使 $(\alpha+\beta)f(\xi)=\alpha\ f(c)+\beta\ f(d)$.

证 （分析：将结果变形 $f(\xi)=\dfrac{\alpha f(c)+\beta f(d)}{\alpha+\beta}\overset{\Delta}{=}\mu$ ）

记 $m=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, 则 $m\le f(x)\le M, x\in[a,b]$

于是 $(\alpha+\beta)m\le\alpha\ f(c)+\beta\ f(d)\le(\alpha+\beta)M$

或 $m\le\dfrac{\alpha f(c)+\beta f(d)}{\alpha+\beta}\le M$

由介值定理知

$\exists\xi\in[a,b]$, 使 $f(\xi)=\dfrac{\alpha f(c)+\beta f(d)}{\alpha+\beta}$，即 $(\alpha+\beta)f(\xi)=\alpha f(c)+\beta f(d)$.

习题 39 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$ 且 $f[f(x)]=x$. 证 $\exists\xi$, 使 $f(\xi)=\xi$.

证 反证法。若不存在点 ξ 使 $f(\xi)=\xi$. 即 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $f(x)\ne x$. $\because f(x)$ 连续，不妨设恒有 $f(x)>x$. 于是 $f[f(x)]>f(x)>x$. 此与 $f[f(x)]=x$ 矛盾。故 $\exists\xi$, 使 $f(\xi)=\xi$.

习题 40 设 $f(x)\in C(a,b)$ 且 $f(x)>0$. 又 $a<x_1<x_2<...<x_n<b$, 证明至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)...f(x_n)}$.

证 $\because f(x)\in C(x_1,x_n)$, 故 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上有最大值 M 和最小值 m，使 $0<m\le f(x_i)\le M, i=1,2,...,n$. 于是 $m\le\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)...f(x_n)}\le M$ 由介值定理，知 $\exists\xi\in[x_1,x_n]\subset(a,b)$, 使 $f(\xi)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)...f(x_n)}$.

习题 41 证明方程 $x\cdot2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根。

证 设 $f(x)=x\cdot2^x-1$, 显然 $f(x)\in C[0,1]$, 但

$f(0)=-1<0,\quad f(1)=2-1=1>0, \therefore\exists x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=x_0\cdot2^{x_0}-1=0$, 即方程 $x\cdot2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根 x_0 存在。

习题 42 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 连续，求 a,b.

解 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx, & |x|<1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{1}{x}, & |x|>1 \\ \dfrac{1+a+b}{2}, & x=1 \\ -\dfrac{1-a+b}{2}, & x=-1 \end{cases}$

故 $f(1+0)=1, f(1-0)=a+b, f(-1+0)=a-b, f(-1-0)=-1.$ 由于 $f(x)$ 在

=1，-1 处连续，所以 $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad a=0, b=1.$

习题 43 试证方程 $xe^x=x+\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 至少有一个实根。

证 做函数 $f(x)=xe^x-x-\cos\dfrac{\pi}{2}x.$ 显然

$f(0)=-1<0, f(1)=e-1>0, \therefore \exists \xi\in(0,1),$ 使 $f(\xi)=0.$ 即 $xe^x=x+\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 在 $(0,1)$ 内必有实根。

习题 44 求 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}$ 的连续区间。

（解：先改写为分段函数，结论为：$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$）

习题 45 求 b 为何值时，函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & 0\le x\le 2 \\ bx-2, & 2<x\le 3 \end{cases}$，在 $[0,3]$ 上处处连续。

只需讨论分段点处的连续性：$f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-1)=3=f(2),$

$f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2^+}(bx-2)=2b-2=f(2),$ 要在 $x=2$ 处连续，必有 $2b-2=3, \Rightarrow b=\dfrac{5}{2}.$

习题 46 设$a>0,x_1>0$，定义 $x_{n+1}=\frac{1}{4}(3x_n+\frac{a}{x_n^3}),n=1,2,...$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解 $x_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3})\ge\sqrt[4]{x_n\cdot x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}.\therefore\{x_n\}$ 有下界 $\sqrt[4]{a}$. 即 $\forall n\in N$, 有 $x_n\ge\sqrt[4]{a}$. 又 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{4}(3+\frac{a}{x_n^4})\le\frac{1}{4}(3+\frac{a}{a})=1$，即 $\{x_n\}$ 单减有下界，故有极限。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 且 $A\ge\sqrt[4]{a}>0$. 有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n+\frac{a}{x_n^3})$ 有

$A=\frac{1}{4}(3A+\frac{a}{A^3})\Rightarrow A=\sqrt[4]{a}$

（舍去负根）（注意：先证明极限的存在是必要的。）

习题 47

设$a>0,x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}=\sqrt{a+x_1},...,x_{n+1}=\sqrt{a+x_{n,}}$.

$n=1,2,..$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

（解： $\{x_n\}$ 单增有上界 $1+\sqrt{a}$，可解出极限 $A=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ ）

习题 48 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $0\le f(x)\le 1$, 证明 $\exists\xi\in[0,1]$, 使 $f(\xi)=\xi$.

证 若 $f(0)=0$, 则取 $\xi=0$. 若 $f(1)=1$, 则可取 $\xi=1$. $f(0)>0,\ f(1)<1$, 则令 $g(x)=f(x)-x$, 必有 $g(x)\in C[0,1]$ 且 $g(0)\cdot g(1)<0$, 由零点定理知 $\exists\xi\in(0,1)$, 使 $g(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\xi$.

习题 49（选择题）设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 连续且 $f(0)\ne0,\varphi(x)$ 有间断点，则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点，(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点，

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点，(D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解 选[D]（(A) 因 $f(x)$ 的值域可能很小。

(B)反例 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 而 $[\varphi(x)]^2\equiv 1$ 无间断点。

(C) $\because \varphi(x)$ 总有定义。

习题 50 证明方程 $x=a\sin x+b\quad(a>0,b>0)$ 至少有一个正根，且不超过 $a+b.$

证 设 $f(x)=a\sin x+b-x,\because f(x)\in C(-\infty,+\infty),\therefore f(x)\in C[0,a+b],$ 而

$$\begin{aligned}f(0)&=b=0, f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(b+a)\\&=a[\sin(a+b)-1]\leq 0.\end{aligned}$$

如果 $f(a+b)=0,$ 则 $a+b$ 即为 $f(x)$ 的零点. 如果 $f(a+b)<0,$ 则由介值定理知 $\exists\xi\in(0,a+b),$ 使 $f(\xi)=0,$ 即 ξ 为所求, 故原命题成立.

习题 51 若函数 $f(x)$ 可以达到最大值和最小值，求证 $\max[-f(x)]=-\min f(x).$

证 设 $\min f(x)=f(x_0),$ 则对任意 x 有 $f(x)\geq f(x_0),$ 或有 $-f(x)\leq -f(x_0)(=-\min f(x)).$ 由 x 的任意性，可知

$$\max[-f(x)]=-f(x_0)=-\min f(x).$$

习题 52 设 $f(x)\in C[a,b]$ 且恒大于零，证明 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证 任取 $x_0\in[a,b]$ 由于 $f(x)$ 在 x_0 处连续且大于 $0,\therefore\exists\delta_1>0,$ 使当 $|x-x_0|<\delta_1,$ 时（若 $x_0=a$ 为左端点，则应为 $0\leq x-a<\delta_1,$ 类似处理 $x_0=b$) 有

$$f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)>0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(*)$$

$\forall \varepsilon > 0$, 对 $\dfrac{f^2(x_0)}{2}\varepsilon$, 可 找 到 $\exists \delta_2 > 0$, 使 当 $|x - x_0| < \delta_2$, 时 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f^2(x_0)}{2}\varepsilon \quad .... \quad (**)$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| = \frac{|f(x_0) - f(x)|}{f(x)f(x_0)} < \frac{|f(x) - f(x_0)|}{\frac{1}{2}[f(x_0)]^2} < \frac{\frac{1}{2}[f(x_0)]^2 \cdot \varepsilon}{\frac{1}{2}[f(x_0)]^2} = \varepsilon.$$

故知 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $x = x_0$ 处连续。由 x_0 的任意性，知 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上连续.

习题 53 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ e^x + \beta, & x \le 0, \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解 $f(0) = 1 + \beta$, 而 $f(0-0) = 1 + \beta$,

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \sin\frac{1}{x} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \text{不存在}, & \alpha \le 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $\alpha > 0$, $\beta = -1$ 时， $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，

当 $\alpha > 0$, $\beta \ne -1$ 时， $x = 0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点（第一类间断点）.

当 $\alpha \le 0$, 时 $x = 0$ 为第二间断点。

习题 54 设函数 $f(x) = \begin{cases} 5e^x - \cos x, & x \le 0 \\ \dfrac{\sin 2x}{tg\,\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$ 问当 $\alpha = ?$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。 解

$$f(0) = 5 - 1 = 4,\ f(0-0) = 4,\ f(0+0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{tg\,\alpha x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\alpha x} = \frac{2}{\alpha}.$$

$\therefore$ 当 $f(0\text{-}0) = f(0+0) = f(0)$, 即 $\dfrac{2}{\alpha} = 4$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

习题 55 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sin\pi x}$ 的间断点，并判定其类型.

解 因当 $x=n$（n 为任一整数）时，$\sin\pi x=0,\therefore x=n$ 是 $f(x)$ 的间断点。再细分，当 $n\neq\pm1$ 时，$\lim\limits_{x\to n}\dfrac{x^2-1}{\sin\pi x}=\infty$，不存在，故除 ±1 处的任何整数都是 $f(x)$ 的第二类间断点。因

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sin\pi x}\overset{x=t+1}{=}\lim_{t\to0}(\frac{t^2+2t}{\sin\pi(t+1)})=\lim_{t\to0}(\frac{t^2+2t}{\sin\pi t\cos\pi+\cos\pi t\sin\pi})$$

$$=\lim_{t\to0}(-\frac{t^2}{\sin\pi t}-\frac{2t}{\sin\pi t})=-\frac{2}{\pi},\text{同理}\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{\sin\pi x}=\frac{2}{\pi}.$$

亦即 $x=\pm1$ 是 $f(x)$ 的第一类（可去）间断点.

习题 56 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}, & x\le0\\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4}, & x>o\end{cases}$ 的间断点并判定其类型。

解 $f(x)$ 的分段点为 $x=0.\because\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=0.$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}=\sin(-\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{1}{\sqrt2}.\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类（跳跃）间断点。当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$，在点 $x=-1,-3,-5,\ldots,-(2k+1),\ldots(k=0,1,2,\ldots)$ 处，$f(x)$ 无意义，故 $x=-1,-3,-5,\ldots,-(2k+1),\ldots$ 是 $f(x)$ 的间断点。因为

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}\overset{u=\frac{\pi}{2}(1+x)}{=}\lim_{u\to0}\frac{u}{\sin u}\cdot\frac{2}{\pi}(\frac{2u}{\pi}-1)$$

$$=-\frac{2}{\pi},\therefore x=-1$$

是第一类（可去）间断点。显然 $x=-3,-5,\dots$ 都是极限为 ∞ 的第二类间断点。当 $x>0$ 时，$f(x)=\sin\dfrac{x}{x^2-4}$，在点 $x=2$ 时，$f(x)$ 没定义，故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的间断点。又 $\because \lim\limits_{x\to 2}\sin\dfrac{x}{x^2-4}$，不存在，故为第二类间断点。

习题 57 设函数 $f(x)\in C[0,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，试证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A.$

证 因为连续，所以 $\forall a,b\in[0,+\infty)$，$f(x)$ 在 $[a,b]\subset[0,+\infty)$ 上有界。又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists K_1$，

当 $x>K_1$ 时，恒有 $|\,f(x+1)-f(x)-A\,|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，取 $x>K_1+1$，则存在自然数 n 使得 $n\le x-K_1<n+1$．记 $l=x-K_1-n$，则 $0\le l<1$，且 $x=K_1+l+n$，于是

$\dfrac{f(x)}{x}-A=\dfrac{n}{x}[\dfrac{f(x)-f(K_1+l)}{n}-A]+\dfrac{f(K_1+l)}{x}-\dfrac{K_1+l}{x}A.$ 下面估计上式右边三项的绝对值。

（1）

$$\because\frac{n}{x}\le 1,\therefore\left|\frac{n}{x}[\frac{f(x)-f(K_1+l)}{n}-A]\right|\le\left|\frac{f(x)-f(K_1+l)}{n}-A\right|=$$

$$\left|\frac{f(K_1+l+n)-f(K_1+l)}{n}-A\right|$$

$$=\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}[f(K_1+l+i)-f(K_1+l+i-1)-A]\right|$$

$$\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|f(K_1+l+i)-f(K_1+l+i-1)-A\right|<\frac{1}{n}\cdot n\frac{\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

（2）因为 $f(x)$ 在 $[K_1,K_1+1]$ 上有界，即 $\exists M>0$，使 $|f(x)|\le M$．故

$\exists K_2=\dfrac{3M}{\varepsilon}$, 当 $x>K_2$ 时，恒有 $\left|\dfrac{f(K_1+l)}{x}\right|<\dfrac{M}{K_2}=\dfrac{\varepsilon}{3}$.

（3）因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{K_1+l}{x}A=0$, 故 $\exists K_3>0$, 使当 $x>K_3$ 时恒有 $\left|\dfrac{f(K_1+l)}{x}A\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 综合（1），（2），（3）$\Rightarrow \forall\varepsilon>0$, 取

$K=\max\{K_1+1, K_2, K_3\}$，则当 $x>K$ 时，恒有

$\left|\dfrac{f(x)}{x}-A\right|<\varepsilon, \therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A.$

习题 68 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为连续周期函数，当 $-\infty<x<+\infty$ 时，有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$, 证明 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

证 先证明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 有相同周期。设 $\varphi(x)$ 的周期为 p，则 $\varphi(x+p)=\varphi(x)$, 由于当 $x\to\infty$ 时，$\varphi(x+p)-\psi(x+p)\to 0$, 即得 $\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]=0$，以及

$\lim\limits_{x\to\infty}[\psi(x)-\psi(x+p)]=\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]-\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$.......... .....(*)

现在说明 $\psi(x)$ 的周期也是 p。若不然，则至少存在一个 x_0, 使 $\psi(x_0)\neq\psi(x_0+p)$. 设 $\psi(x)$ 的周期为 q, N 为任意正整数，

$x=x_0+Nq$, 以及 $\alpha=|\ \psi(x_0)-\psi(x_0+p)\ |>0$, 此时恒有

$$|\ \psi(x)-\psi(x+p)\ |=|\psi(x_0+Nq)-\psi(x_0+Nq+p)|$$

$$=|\psi(x_0)-\psi(x_0+p)|=\alpha\text{.}$$

但由（*），对充分大的 x, 必成立 $|\psi(x)-\psi(x+p)|<\alpha$, 这显然矛盾（矛盾于 $=\alpha$）$\therefore p=q$. 下面证明 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$. 若结论不真，则至少存在一个 x_1, 使 $\varphi(x_1)\neq\psi(x_1)$. 记 $\beta=|\ \varphi(x_1)-\psi(x_1)\ |>0$, 则 $\forall\ x=x_1+Np$, 恒有 $|\ \varphi(x)-\psi(x)\ |=\beta$, 这与 $\lim\limits_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$, 矛盾。于是 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

习题 59　求　$\lim\limits_{x\to o}(\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n})$

解 ∵ $\sin\frac{x}{2^n}=\sin(2\cdot\frac{x}{2^n})=2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}$

$$\therefore\quad \cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}},\quad \text{于是}$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{4}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{4}}{2\sin\frac{x}{8}}\cdots\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}})$$

$$=\lim_{x\to0}(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}})=\lim_{x\to0}(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}})$$

$$=\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x}\cdot1)=1.$$

习题 60　求极限　$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+...+\frac{n}{a^n}).$

解　记　$S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+...+\frac{n}{a^n}$,则 $\frac{1}{a}S_n$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^3}+\frac{3}{a^4}+...+\frac{n}{a^{n+1}}.$$

$$S_n-\frac{1}{a}S_n=(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+...+\frac{1}{a^n})-\frac{n}{a^{n+1}}.$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{a}}\lim_{n\to\infty}\{\frac{\frac{1}{a}[1-(\frac{1}{a})^n]}{1-\frac{1}{a}}-\frac{n}{a^{n+1}}\}$$

$$=\frac{a}{a-1}(\frac{1}{a-1}-0)=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

习题 61　试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$,　其中 $a>1$.

证　设$x_n=\dfrac{n}{a^n}$，　则$\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\dfrac{\dfrac{n+1}{a^{n+1}}}{\dfrac{n}{a^n}}=\dfrac{n+1}{a^n}$

$=\dfrac{1}{a}(1+\dfrac{1}{n}).\because\quad a>1$,则$\exists N>0$，　使得当 $n>N$时，

有$\dfrac{|x_{n+1}|}{x_n}=\dfrac{1}{a}(1+\dfrac{1}{n})<q<1$.

故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$.

习题 62　$a=?$　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ **在** $x=0$ **点连续。**

解

$$\because\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln(1-\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

如果函数在$x=0$连续，则$a=\dfrac{1}{2}$.

63. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x^2}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+x}\overset{(分子分母除以\ x)}{=}-\infty.$$